

LBRIS

We know
books

IPOTEZA LUI RIEMANN

Veriga lipsă dintre numerele prime
și mecanica cuantică

JORGE JIMÉNEZ URROZ

Traducere de Cristina Marin

LITERA
București

CUPRINS

Capitolul 0

Riemann, ipoteza sa și despre cum variabila complexă se unește cu aritmetica	7
--	---

Capitolul 1

Scurtă istorie a numerelor prime. Protagonistii	21
---	----

Capitolul 2

Logaritmul, numărul e și constanta γ , a lui Euler	51
---	----

Capitolul 3

Numerele prime	63
Considerații preliminare	63
Teorema numerelor prime și ipoteza Riemann	78

Capitolul 4

Funcția zeta și ipoteza Riemann	99
Dincolo de ipoteza lui Riemann	124
Numere prime în progresie aritmetică	126
Conjectura lui Artin	127
Nivelurile energetice ale mecanicii cuantice	128

Anexă	135
-------	-----

Recomandări de lectură	143
------------------------	-----

Riemann, ipoteza sa și despre cum variabila complexă se unește cu aritmetica

Ați deschis o carte care are ca scop explicarea ipotezei lui Riemann. Dar deja știți aceasta, din titlu. Până aici totul este clar. Ei bine, pentru a explica ipoteza lui Riemann, pentru a o înțelege mai bine, vom pătrunde în natura acesteia. Și din acest punct lucrurile încep să fie mai complicate.

Uneori veți avea impresia că participați la emisiunea-concurs *Vrei să fii milionar?* Jocul televizat, având ca premiu un milion de dolari, a captivat milioane de spectatori. Concurenții trebuiau să răspundă la 10 întrebări din diferite domenii (istorie, literatură, sport, cinema, știință etc.) pentru a câștiga milionul pus în joc. Ca în filmul *Vagabondul Millionar (Slumdog Millionaire)*. Doar că în această carte există o singură întrebare, dintr-un singur domeniu:

Întrebarea de un milion de dolari: Este adevărată ipoteza lui Riemann?

Am spus că pare mult mai ușor față de concursul cu pricina, deoarece este o singură întrebare, dar de fapt nu este mai simplu. Suntem ca la un examen de matematică, unde enunțurile problemelor propuse sunt precedate de un avertisment clar și sever: „Toate răspunsurile trebuie să fie demonstrate“.

În cazul nostru se aplică aceeași regulă. Deci, dacă veți hotărî să răspundeți „da“ sau „nu“, înainte de a încasa premiul de un milion, va trebui să justificați alegerea răspunsului. Dacă argumentarea pe care o puteți oferi va convinge comunitatea matematicienilor, nu trebuie decât să o comunicați Institutului Clay care, cu mare entuziasm, vă va înmâna milionul de dolari care vi se cuvine. Găsiți adresa Institutului Clay la sfârșitul cărții.

Institutul Clay este o fundație privată fondată de Landon Clay, om de afaceri absolvent al Universității Harvard. Convins că matematica a avut o mare contribuție la progresul umanității (și la îmbunătățirea calității vieții), Clay a fondat Institutul în 1998, cu misiunea de a comunica și de a răspândi cunoștințele matematice. Printre numeroasele strategii adoptate pentru atingerea obiectivului, în anul 2000 s-a decis alocarea unui premiu pentru a marca noul mileniu.

Pentru stabilirea cerințelor necesare primirii premiului, Clay a convocat cinci dintre cei mai buni matematicieni ai momentului. Aceștia au întocmit o listă a celor mai importante șapte probleme ale matematicii de astăzi. Intenția sa era de a oferi un milion de dolari celui care va fi în măsură să rezolve una dintre aceste probleme. Dintre cele șapte probleme alese, două fac parte din aria denumită „regina matematicii“ – după definiția lui **Karl Friedrich Gauss** (1777-1855) – aritmetica sau teoria numerelor. Una dintre acestea, mai ciudată, singura de pe listă datând de mai bine de un secol, este în continuare în așteptarea unei soluții: ipoteza lui Riemann.

Clay a fondat Institutul și pentru a omagia faimosul Congres Internațional de Matematică desfășurat la precedentul schimb de secole, în 1900. Un congres care a marcat dezvoltarea acestei științe.

În dimineața zilei de 8 august 1900, David Hilbert (1862-1943), invitat la Congresul Internațional de Matematică desfășurat la Universitatea Sorbona din Paris, a ținut o prelegere complet neașteptată. În loc să-și expună cercetările recente, Hilbert a propus o listă de douăzeci și trei de probleme nerezolvate, cărora comunitatea științifică trebuia să li se dedice în viitor.

Hilbert s-a temut că titlul simplu al prelegerii sale, „problemele matematicii” nu îi va interesa pe colegii săi și l-a comunicat târziu organizatorilor, riscând să nu fie inclus pe lista conferențiarilor. Dar propunerea sa a fost apreciată ca originală. Matematica secolului XX începuse să se contureze.

Până în secolul al XVIII-lea, evoluția matematicii se asocia dorinței de a contribui la înțelegerea naturii. La bază era necesitatea rezolvării unor probleme specifice, cum ar fi brahiscrona, propagarea căldurii sau legea gravitației universale a lui Newton.

Începând cu secolul al XIX-lea, s-au petrecut mari schimbări, în special după Revoluția Franceză, dar și ca urmare a răspândirii democrației între clasele sociale și inclusiv în știință.

După Revoluție, Napoleon a declarat că dezvoltarea matematicii trebuie dedicată bunăstării statului. Aceasta trebuia să se ocupe de rezolvarea unor probleme militare cum ar fi balistica și hidraulica. Cu toate acestea, răspândirea democrației a adus o mai mare recunoaștere a oamenilor de știință, care au început să se bucure de mari privilegii în societate: „Profesorul predă, cercetează și se eliberează de problemele cotidiene”. Pe lângă fondarea cunoscutelor *grandes écoles*, încep să apară, în domenii mai generale ale matematicii, „distinge personaje”, profesori apti să pregătească clase de studenți din ce în ce mai străluciți, care vor deveni în viitor mari oameni de știință exigenți în ceea ce privește rigoarea studiului.

Parisul a devenit capitala matematicii, în care un personaj ca **Augustin Louis Cauchy** (1789-1857), prin intermediul cărții sale *Cours d'analyse de l'École polytechnique* a conferit rigoare maximă în exprimarea conceptelor de limită și de continuitate. Matematica, dintr-un simplu instrument construit cu ajutorul calculelor specifice, s-a transformat într-o artă capabilă de a se dezvolta autonom pe o bază pur logică.

Avansul științei matematice s-a răspândit în Germania, în principal datorită lui Gauss, și în special – lui Riemann, un pionier al acestei schimbări de perspectivă. Hilbert însuși a recunoscut că, prezentând



Figura 1.
Karl Friedrich Gauss.

lista cu cele douăzeci și trei de probleme, a intenționat să îmbogățească principiul lui Riemann și să furnizeze demonstrații bazate exclusiv pe raționament și nu pe calcul. În discursul său, Hilbert a definit un obiectiv și un mod de lucru substanțial diferit de cel tradițional, conceput pentru a schimba viitorul matematicii și pentru a dezvolta ceea ce astăzi este cunoscut precum „programul lui Hilbert”, în care matematica trebuie să urmărească un sistem finit de axiome, alese în mod corespunzător.

Pe lista prezentată de Hilbert, numărul 8 corespunde ipotezei lui Riemann. Este singura problemă de pe listă care nu a fost rezolvată încă până astăzi, deși încercările nu au lipsit. Mulți matematicieni faimoși din secolul XX au obținut recunoașterea rezolvând unele probleme din lista lui Hilbert, și nu puțini dintre ei au intrat în istoria matematicii încercând să demonstreze ipoteza lui Riemann. Munca lor nu a fost inutilă, de fapt din numeroasele lor tentative s-au născut teorii noi și utile care au îmbogățit peisajul matematic global. De fapt și de drept, totul a început de la o presupunere formulată într-o singură frază, scrisă pe a patra pagină din cele nouă ale unui articol publicat în 1859 de **Georg Friedrich Bernhard Riemann** (1826-1866), membru al Academiei de Științe din Berlin.

Bernhard Riemann s-a născut pe 17 septembrie 1826 la Breselenz, în nordul Hanovrei, în Germania de astăzi. A fost al doilea din cei șase copii, dintre care patru băieți. Uneori salariul tatălui – pastor luteran destul de rigid – nu le ajungea celor opt membri ai familiei Riemann până la sfârșitul lunii. Viața de zi cu zi era dură, dar nu imposibilă, familia reușind să creeze o atmosferă caldă, hrănind astfel dragostea lui Bernhard pentru cei apropiați.

Părinții lui Riemann au considerat educația copiilor mai presus de orice altceva. La început, Bernhard a fost educat de tatăl său acasă.

La vârsta de șase ani, el era deja capabil să rezolve probleme de aritmetică, iar evoluția sa a fost atât de rapidă, încât la vârsta de zece ani, tatăl lui a decis să-l încredințeze profesorului Schulz pentru dezvoltarea potențialului său enorm. Băiatul era deja capabil să abordeze probleme de geometrie, pentru care propunea rezolvări noi.

El a făcut progrese enorme în privința însușirii noțiunilor și atunci când a împlinit paisprezece ani a fost trimis la liceu, în orașul Hanovra, unde locuia bunica lui. A fost admis direct în al treilea an de studiu. Evident, băiatul avea un talent extraordinar, și dragostea părinților săi, îmbinată cu dorința de a-i dăruia ce era mai bun, a alimentat fondul nativ, probabil neglijându-i nevoile emoționale.

Riemann a devenit singuratic și timid. Tânărul era concentrat asupra studiului și izolat față de lumea exterioară. Caracterul său timid, interiorizat, l-a făcut cu ușurință victima *hărțuirilor* la școală. În această situație, Riemann a găsit un refugiu în matematică. Uneori, nevoia de a-și vedea familia l-a determinat să străbată cei 50 de kilometri care îl despărțeau de casă.

La doi ani după mutarea la Hanovra, bunica lui a murit, astfel că a fost transferat în orașul Lüneburg, la școala superioară Gymnasium Johanneum. Aici, Bernhard a fost găzduit de domnul Seffer, un profesor, care l-a ajutat și încurajat să studieze. Riemann a fost un elev bun la matematică, la celelalte materii nefiind strălucit. Uneori tendința sa de a căuta perfecțiunea în orice activitate îl împiedica să termine munca la timp.

Pe de altă parte, tendința lui spre perfecțiune s-a dovedit foarte utilă în momentul în care a devenit unul dintre părinții rigorii matematice.

În adolescență, Bernhard, trecând peste pasiunea și instinctul nativ pe care le avea pentru matematică, intenționa să urmeze sfaturile



Figura 2.
Bernhard Riemann.

tatălui, care îl orienta spre o carieră ecleziastică. În Germania secolului al XIX-lea, a deveni pastor însemna a avea o profesie care permitea un trai confortabil. Intrarea în rândurile clerului i-ar fi garantat o rentă care în viitor ar fi fost de folos pentru întreținerea surorilor sale. Și întâmplarea a făcut ca unica universitate din regatul Hanovrei unde se putea studia teologia să fie cea din Göttingen, leagănul fraților Grimm, precum și instituția în care locuia eminentul om de știință Karl Friederich Gauss.

Citiți aceste rânduri la aproximativ două secole și jumătate de la nașterea lui Gauss, în anul 1777. Cu toate acestea, faima și numele marelui matematician nu numai că s-au menținut de-a lungul timpului, dar continuă să crească exponențial. Este destul să ne gândim, de exemplu, la marele număr de accesări ale motorului de căutare Google: dacă tastăm numele lui Gauss, vom primi 16 600 000 de rezultate în 0,51 secunde. Pentru a face o comparație, căutându-l pe „Cristofor Columb, descoperitorul Americii“, de-abia au reieșit 10 300 000 de rezultate, și tastând „Usain Bolt“, numele celui mai rapid om din istorie, media actuală aduce în prim plan, un număr identic de rezultate.

Gauss a fost unul dintre cei mai mari oameni de știință din toate timpurile. Și îl putem considera „savant“, deoarece contribuțiile sale decisive nu s-au limitat doar la diferite ramuri ale matematicii, precum geometria, algebra sau inestimabila sa operă asupra teoriei numerelor. El a fost, de asemenea, o autoritate în domeniul astronomiei, devenind faimos pentru descoperirea planetei Ceres, și în fizică, inventând telegraful (împreună cu fizicianul Weber). Creierul lui Gauss, conservat la Universitatea din Göttingen, a avut cel mai mare număr de circumvoluțiuni menționat în istoria umanității, ceea ce i-a permis o activitate neuronală peste normal. Această descoperire a fost făcută în anul 2013, când cercetătoarea Renate Schweizer a descoperit creierul savantului, etichetat greșit vreme de secole, ca aparținând lui Conrad Heinrich Fuss, ilustru medic al universității.

Uneori coincidențele, soarta, întâlnirile accidentale, par menite a crea oportunități și a modela destine. Trebuie să fim recunoscători pentru o coincidență care-a avut loc în Göttingen. O coincidență care i-a intersectat în același spațiu și în același loc pe Gauss, bătrânul director al Observatorului Astronomic, și Riemann, student boboc la cursurile de teologie. Această întâlnire a avut consecințe decisive pentru istoria matematicii până în prezent. De fapt, ipoteza lui Riemann pornește de la presupunerea lui Gauss asupra cantității de numere prime.

În 1846, după ce a petrecut patru ani la liceul din Hanovra, Riemann s-a înscris la Universitatea din Göttingen și, cu toate că frecvența regulat cursurile de teologie, urmând dorința tatălui, a fost mai atras de matematică. Urmându-și instinctul, el participă spontan la cursurile lui Gauss.

Gauss, în calitate de director al observatorului, nu dădea prea multă importanță prelegerilor de la universitate. Orele lui Gauss nu se refereau strict la matematică, ci porneau de la astronomie și demonstrau modul său faimos de calculat orbita lui Ceres. Nu putem să nu ne întrebăm ce s-ar fi întâmplat dacă dezvoltarea inovativă a variabilei complexe a lui Riemann și noțiunile lui Gauss asupra numerelor prime nu s-ar fi întâlnit. Ce-i drept, Gauss era deja bătrân, cu sănătatea șubredă și deloc capabil de un interes prea mare pentru cursurile sale.

În acea perioadă, matematica nu era una dintre disciplinele prioritare în Universitatea din Göttingen, dar pasiunea lui Riemann pentru această știință, mai ales după ce a asistat la prelegerile lui Gauss, a devenit totală. Admirația dintre Gauss și Riemann a fost reciprocă. Ba chiar, datorită lui Riemann, Gauss a început să simtă satisfacția predării, activitate pe care o detestase până în acel moment. Cităm cuvintele sale: „Am o aversiune pentru predare. Sarcina perenă a unui profesor de matematică este să predea ABC-ul științei și cu această muncă ingrată, profesorul își pierde timpul atât de prețios“. Atitudinea aceasta s-a schimbat odată cu sosirea lui Riemann.

Prelegerile sale erau așa de frumoase și de utile încât l-au convins pe Riemann să-i scrie imediat tatălui său pentru a-i cere permisiunea de a frecventa universitatea din Berlin, care în acea perioadă era cel mai recunoscut centru german pentru studiul matematicii.

În 1847, cu consimțământul tatălui său, Reimann s-a transferat la Universitatea din Berlin, unde a studiat cu **Gustav Lejeune Dirichlet** (1805-1859), **Carl Gustav Jacobi** (1804-1851) și **Jakob Steiner** (1796-1863). În această perioadă a elaborat teoria generală asupra variabilei complexe (și a celor care sunt cunoscute azi astăzi drept „suprafețele lui Riemann”). La bază au stat ideile lui **Leonhard Euler** (1707-1783) și ale lui Cauchy. Numerele complexe fuseseră deja descoperite de Bombelli cu două sute de ani înainte. Timpul pe care l-a petrecut la Berlin a coincis cu revoluția din martie 1848 și, deși reticent să se implice în probleme care nu aveau legătură cu matematica, Riemann a participat la evenimentele revoluționare. Incitat de milițiile studentești, pentru a-și demonstra angajamentul, matematicianul a păzit palatul regal, protejându-l pe rege timp de șaptesprezece ore, de la ora nouă din dimineața zilei de 24 martie 1848 până la ora unu a nopții următoare.

La Berlin a învățat integralele definite, ecuațiile cu derivate parțiale și teoria numerelor datorită lui Dirichlet, fondatorul a ceea ce este conosciut astăzi ca teoria analitică a numerelor. În plus, și-a însușit mecanica analitică și algebra superioară cu ajutorul lecțiilor lui Jacobi. Atât acesta, cât și Dirichlet urmăreau tendința inițiată de Cauchy în expunerea matematicii cu rigurozitate absolută, ceea ce se potrivea bine exigențelor lui Riemann de a-și prezenta perfect ideile.

În 1849, s-a întors la Göttingen pentru a discuta despre teza de doctorat menită să aprofundeze noua tendință a matematicii. Riemann a înlocuit calculele cu concepte. Mai precis, teza se baza pe funcțiile cu variabile complexe, teorie foarte bine dezvoltată în lucrările lui Cauchy, dar aproape ignorată de matematicienii contemporani. Gauss nu făcea excepție de la dezinteresul pentru acest subiect de studiu. Iată diferența: în loc să înțelegem o funcție prin expresia sa algebrică,

Riemann a decis să o înțelegem prin intermediul proprietăților pe care le satisfăcea. Special pentru aceasta și-a propus să substituie calculele cu concepte. Prin această nouă definiție, Riemann a trebuit să redescopere tot ceea ce Cauchy realizase deja.

Teza despre care vorbim, dezbătută la Universitatea din Göttingen în 1851, este considerată una dintre cele mai influente din istoria matematicii și, a avut șansa să fie coordonată de Gauss, care a prezentat-o fără să se abțină de la elogii: „...o minte creativă, activă, cu adevărat dedicată matematicii și de o originalitate magnific de inventivă... A realizat cercetări minuțioase și profunde“. Odată cu întâlnirea dintre Riemann și Gauss, se realiza mult așteptata legătură între variabilele complexe și numerele prime.

Interesul lui Riemann pentru teoria numerelor se manifestase cu ani în urmă, atunci când directorul liceului i-a împrumutat cartea lui **Adrien Marie Legendre** (1752-1833) cu titlul *Teoria Numerelor*, pe care a devorat-o în șase zile, în ciuda celor 900 de pagini și a dificultății lucrării. Putem spune că germeii contribuției sale la teoria numerelor apăruseră deja timpuriu și că lipsea doar un ingredient, un stimul extern pe care l-a primit câțiva ani mai târziu de la Dirichlet și de la Gauss.

În timpul șederii la Göttingen, Riemann a publicat o serie de articole de importanță fundamentală. Un exemplu este noua sa concepție despre geometrie, baza matematică pe care **Albert Einstein** (1879-1955) și-a fondat teoria relativității. De fapt, în 1854, Gauss l-a îndemnat pe Riemann să opteze pentru un post de *privatdozent*, profesor asistent fără plată, ale cărui venituri proveneau din donațiile spontane ale studenților. Riemann este un exemplu de dăruire totală pentru știință, dincolo de propriile sale nevoi, și trebuie reamintit că finanțările lui au fost în general foarte reduse și s-au înrăutățit mai mult atunci când, în 1858, a fost forțat să preia frâiele în cadrul propriei familii, după moartea a doi dintre frații săi.

Pentru a aplica la postul de *privatdozent* era obligatorie pregătirea a trei subiecte. Președintele comisiei, în acest caz chiar Gauss, a ales

unul. De obicei era ales primul subiect, deci Riemann a decis să prezinte mai întâi *Reprezentarea funcțiilor prin intermediul seriilor trigonometrice*, apoi o temă intitulată *Rezolvarea a două ecuații de gradul al doilea cu două necunoscute* și o a treia *Despre ipotezele pe care se bazează geometria*. Primele două subiecte tratau rezultate pe care Riemann le pregătise deja și care pentru el nu ar fi ridicat nici cea mai mică dificultate. Dar Riemann a ignorat interesul manifestat în trecut de Gauss pentru axiomatica geometriei euclidiene, iar faptul că profesorul a ales chiar al treilea subiect a fost o surpriză deloc plăcută.

Riemann nu se așteptase la această alegere, care a pus o așa presiune asupra lui, astfel încât a intrat în depresie. În ciuda tuturor dificultăților, nu a renunțat. Pentru început, a închiriat o „căsuță” cu grădină și, ca întotdeauna, a continuat să se bazeze pe familia sa. Cunoaștem emoțiile cu totul speciale ale lui Riemann prin intermediul scrisorilor trimise familiei sale. Unul dintre cei mai iluștri matematicieni din istorie a fost susținut emoțional de propria familie, iar acest lucru a fost important pentru binele umanității.

În ziua în care Riemann și-a prezentat lucrarea, se găsea în fața lui Gauss, expert în acel subiect, având întrebări concrete pe care dorea să le rezolve. Un om obișnuit să examineze lumea, care în singurătate, așezat la biroul său, își punea întrebări despre forma acesteia. Cu ani în urmă, Gauss publicase articolul *Studii generale asupra suprafețelor curbe*, în care, printre numeroase probleme, analizase o lume a cărei formă putea să fie orice tip de suprafață, întrebându-se: cum putem să distingem forma planetei pe care trăim? Umanității îi trebuiseră 700 de ani, de la Thales din Milet până la Plinius și Ptolemeu, pentru a determina dacă Pământul era plat sau rotund.

În lucrarea sa, Riemann a reușit să extindă definiția unei mari părți din metrică până când curbatura devenea intrinsecă suprafeței în care se trăia, ceea ce înseamnă că rezolvarea unei considerabile cantități de calcule în punctul în care trăim ne permite să decidem ce formă are suprafața în care trăim. Lucrarea este considerată o capodoperă, atât pentru structură, cât și pentru conținut – Riemann s-a străduit să